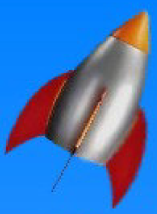
Taller de cohetes

ACTIVIDADES DE PROFUNDIZACIÓN

Centro de Entrenamiento y Visitantes



Taller de cohetes

Recordando la experiencia…

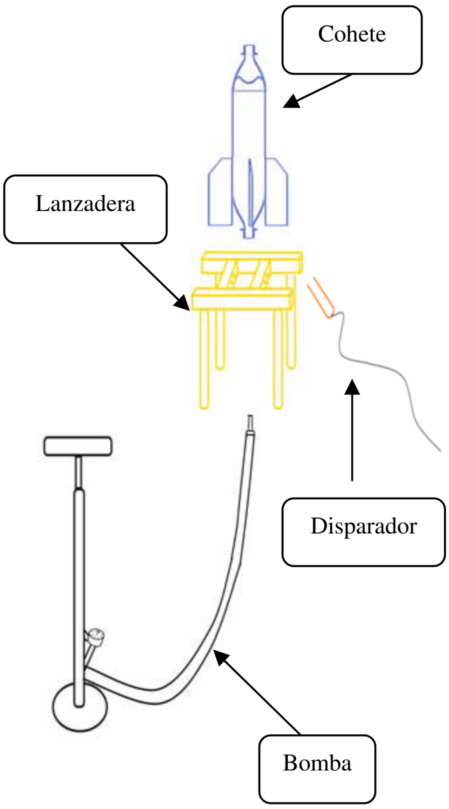
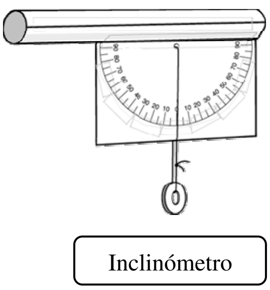


Figura 1

En el Taller de Cohetes de Agua cada alumno, individualmente o por parejas construisteis un **cohete** utilizando materiales sencillos y de bajo coste (botellas de plástico y celo) con el cuidado necesario para que presentara la estabilidad necesaria para conseguir un vuelo eficaz.

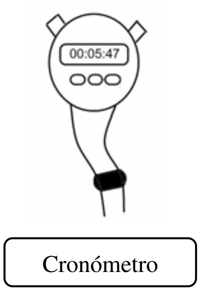
Tras la construcción procedisteis a la fase de lanzamiento utilizando la **lanzadera**. Para ello se llenó la botella que hacía de depósito con agua aproximadamente hasta 1/3 de su capacidad y se introdujo aire a presión mediante una bomba.

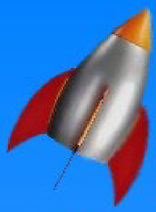
Al alcanzar la presión deseada y retirar el alambre que hacía de **disparador** el cohete se vio liberado e inició su vuelo.



El **inclinómetro** nos sirvió para medir los ángulos de altura máxima y de desviación producida en el vuelo.

También controlamos con un **cronómetro** el tiempo que el cohete permanecía en el aire, desde que salía de la lanzadera hasta que volvía a caer al suelo.





Taller de cohetes

Responde a las siguientes cuestiones:

- ¿Por qué sube el cohete? ¿Y por qué baja?

- ¿Qué leyes físicas son aplicables al movimiento del cohete?

- ¿Cómo se podría saber de una forma aproximada la altura conseguida por el cohete?

Lee con atención:

Los cohetes aprovechan una de las leyes básicas de la naturaleza que fueron descubiertas por el gran científico Isaac Newton a finales del siglo XVII. Una de estas leyes, denominada **Ley de acción y reacción,** dice que por cada acción existe una reacción igual y en sentido contrario. Esta ley explica lo que ocurre cuando inflas un globo y luego lo sueltas sin atar un nudo. El aire sale expulsado por la boca del globo en la dirección opuesta. Esta ley también nos dice que para construir un cohete poderoso necesitamos expulsar mucho material a alta velocidad en la dirección opuesta a la que deseamos que se desplace el cohete. Eso es exactamente lo que cumple el diseño del motor de un cohete. La mayoría de los cohetes utilizan gases de escape a alta velocidad producidos al quemar el combustible del cohete para impulsarse hacia arriba y alejarse de la superficie de la Tierra.

En nuestro caso como combustible utilizamos un líquido: el agua, que es expulsada con fuerza por la presión que le ejerce el aire que le estamos introduciendo mediante la bomba. El chorro del agua sale hacia abajo y nuestro cohete sale disparado a gran velocidad en dirección opuesta.

➢ Estudio dinámico del empuje del cohete:

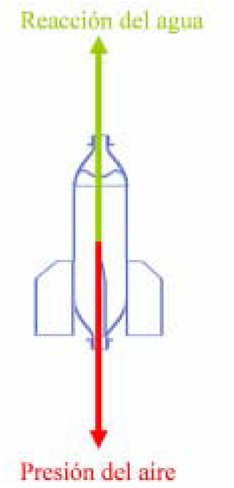


Figura 2

Como acabamos de ver la fuerza que hace que el cohete salga disparado es la reacción del agua a la presión a la que se ha visto sometida por el aire que está encima.

Esa fuerza, según otra de las leyes de Newton provocará una aceleración:

$$F_R = m * \mathbf{a} \longrightarrow \mathbf{a} = F_R / m \quad \textbf{(Ecuación 1)}$$

Esa aceleración será constante siempre que tanto la fuerza como la masa sean constantes. En nuestro caso la masa no lo es, ya que el cohete sube mientras va expulsando agua, con lo cual su masa va disminuyendo.

Esto hace que el movimiento del cohete no sea uniformemente acelerado con lo cual se complican mucho más las ecuaciones de movimiento del sistema.

➢ Estudio cinemático del cohete:

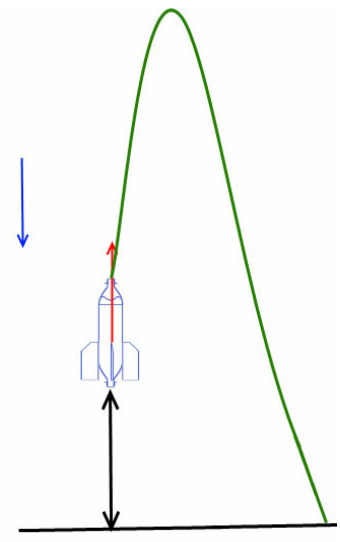


Figura 3

En el momento en el que el agua se acaba la única aceleración que existe es la de la gravedad, que es constante, con lo cual, a partir de ese momento el cohete sigue un movimiento balístico y pueden utilizarse las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado cuyas expresiones generales son:

$$H = h_0 + v_0 t + ½\, a t^2 \quad \textbf{(Ecuación 2)}$$

Donde: **H** es la altura máxima que alcanza el cohete, $\mathbf{h_0}$ es la altura a la cual el cohete se ha vaciado de agua, $\mathbf{v_0}$ es la velocidad que lleva en el momento en el que el agua se ha acabado y **a** = **g** = -9.8 m/s^2.

Por otro lado la expresión de la velocidad en el eje y es:

$$v = v_0 + at \quad \textbf{(Ecuación 3)}$$

Intenta demostrar la expresión del llamado **Método Littlewood** en la cual se obtiene la altura máxima alcanzada por el cohete en función únicamente del tiempo de vuelo del cohete:

$$H = 1.23\ T^2 \quad \textbf{(ecuación 4)}$$

Esta expresión es fácilmente deducible a partir de las ecuaciones del movimiento balístico.

Nota: hay que suponer que el cohete tarda aproximadamente lo mismo en la subida y en la bajada.

Taller de cohetes

Calcula:

Lanzamos el cohete que hemos construido y durante aproximadamente 3 metros sube expulsando agua. A partir de ahí cronometramos y resulta que pasan 5 segundos antes de que el cohete toque el suelo.

Si suponemos que el cohete tarda aproximadamente en alcanzar su altura máxima y en descender desde ahí hasta el suelo calcular esa altura y la velocidad que tenía el cohete cuando se le acabó el agua.

Lee con atención:

Existe una forma mucho más exacta de obtener la altura máxima del cohete, ya que en esta se tiene en cuenta las posibles desviaciones de la vertical causadas por el viento, por el impulso inicial al tirar del disparador, etc. En ella hay que poner a prueba todos nuestros conocimientos de trigonometría.

Si suponemos el caso ideal en el que el cohete sube perfectamente vertical tenemos la siguiente situación:

Taller de cohetes

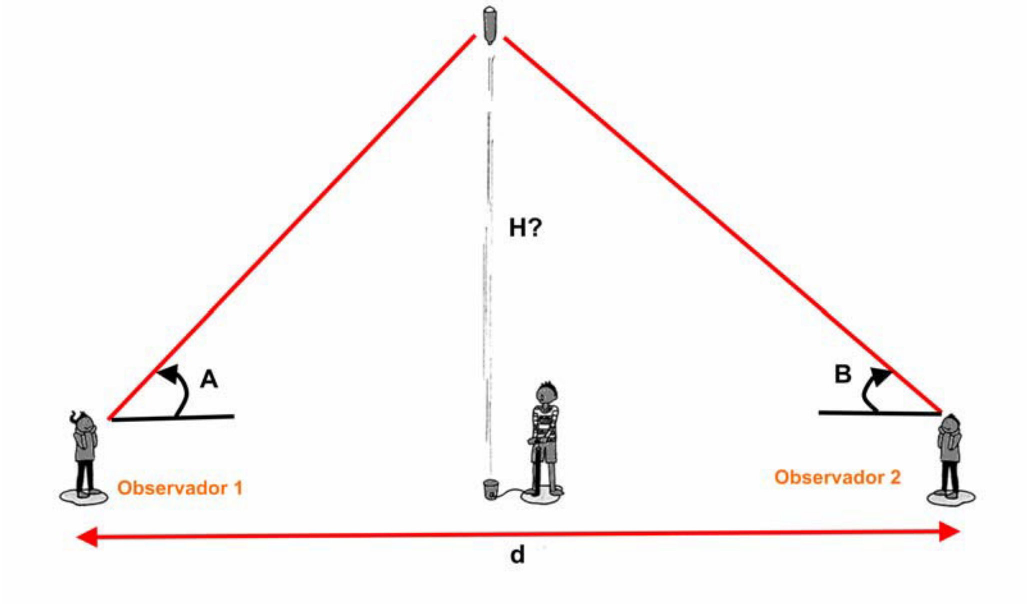


Figura 4

En la situación real en la que el cohete es desviado, si hacemos una proyección sobre el suelo de los ángulos de desviación en la altura máxima que registran los dos observadores tenemos el siguiente esquema:

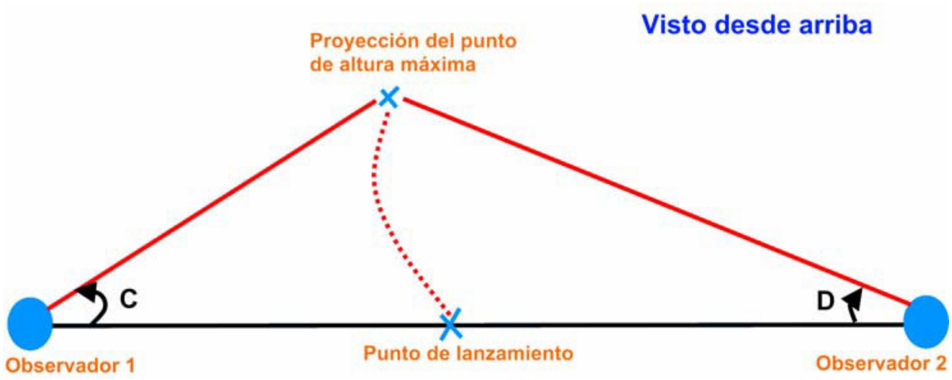


Figura 5

Taller de cohetes

Si hacemos un esfuerzo por verlo en tres dimensiones:

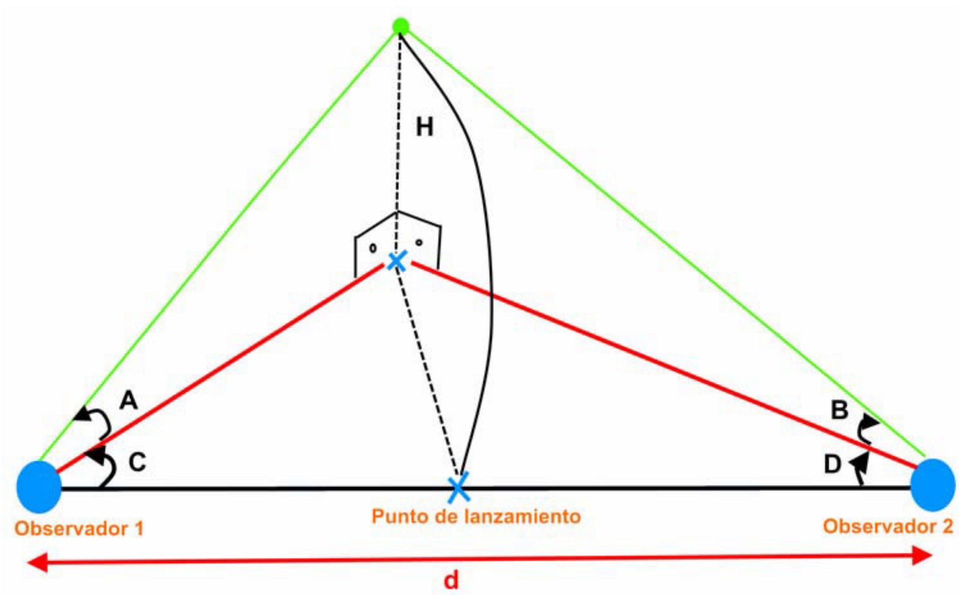
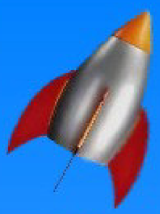


Figura 6

La expresión que nos daría la altura máxima H es la siguiente:

$$H = \frac{d}{\tan A + \tan B}\left(\frac{1}{\frac{\sin C}{\tan D} + \cos C} + \frac{1}{\frac{\sin D}{\tan C} + \cos D}\right) \cdot \tan A \cdot \tan B \qquad \textbf{(Ecuación 5)}$$



Calcula:

Se han realizado tres lanzamientos y se han obtenido los siguientes resultados al medir los ángulos de altura y desviación y los tiempos de vuelo de los cohetes:

Cohete	A	B	C	D	Altura (ángulos)	T_1	T_2	T_3	Altura (tiempos)
1	60º	60º	50º	50º		6,58	6,67	5,98	
2	40º	55º	20º	30º		5,12	4,96	5,38	
3	45º	55º	45º	30º		5,00	6,25	4,62	

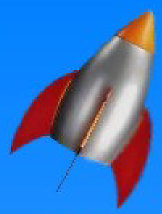
Calcula la altura máxima que alcanzan los tres cohetes, tanto con la fórmula basada en tiempo (ecuación 4) como la que está basada en ángulos (ecuación 5).

Nota: la distancia entre los dos observadores que toman los ángulos es de 40 metros.

Responde a las siguientes cuestiones:

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el ejercicio anterior:

- Enumera tres causas que pueden hacer que un cohete alcance una altura máxima mayor que otro.



- ¿Por qué crees que se han tomado tres medidas para el tiempo de vuelo? ¿Bastaría con tomar sólo una?

- ¿Cuál de las dos fórmulas crees que es más fiable? ¿Por qué?

- En el caso de los ángulos se toman dos para el ángulo de altura máxima (A y B) y otros dos para el ángulo de desviación respecto de la vertical (C y D). ¿Crees que bastaría con tomarlos sólo una vez?

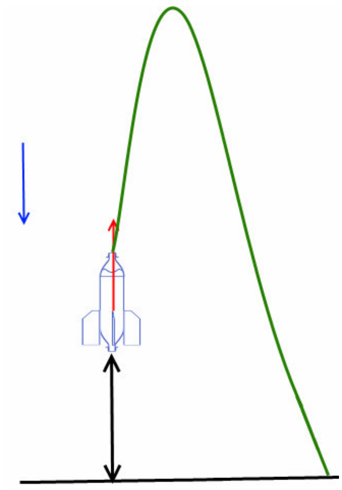
Deduce la ecuación 5 que nos permite calcular la altura máxima que alcanza el cohete.

Pistas: posiblemente necesitarás emplear los teoremas del seno y del coseno en algún momento de la demostración

Taller de cohetes

ANEXOS

ANEXO I: Demostración del cálculo de la altura máxima del cohete en función del tiempo de vuelo.



En el momento en el que el agua se acaba la única aceleración que existe es la de la gravedad, que es constante, con lo cual, a partir de ese momento el cohete sigue un movimiento balístico y pueden utilizarse las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado cuyas expresiones generales son:

$$H = h_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 \qquad (1)$$

$$v = v_0 + at \qquad (2)$$

donde:

h_0 es la altura que alcanza el cohete durante el tiempo que está saliendo el agua. En principio esta altura la vamos a despreciar (**h_0**=0), pero estrictamente habría que sumarle estos metros a la altura que nos resulta.

v_0 es la velocidad que lleva el cohete en el momento en el que deja de salir el agua.

a es la aceleración que en nuestro caso va a ser la de la gravedad.

En la altura máxima v=0 y tenemos:

$$H_{max} = v_0 t_{max} - \frac{1}{2} g t_{max}^2 \qquad (3)$$

$$0 = v_0 - g t_{max} \qquad (4)$$

De la ecuación (4) podemos despejar el tiempo en el que se alcanza la altura máxima:

$$t_{max} = \frac{v_0}{g} \qquad (5)$$

Sustituimos (5) en la expresión de la altura máxima (3):

$$H_{max} = v_0 \left(\frac{v_0}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g} \right)^2 = \frac{v_0^{\,2}}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^{2}}{g} = \frac{1}{2} \frac{v_0^{\,2}}{g} \quad (6)$$

Multiplicando (6) arriba y abajo por g:

$$H_{max} = \frac{1}{2} \frac{v_0^{\,2}}{g} \frac{g}{g} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2 g = \frac{1}{2} t_{max}^{2}\, g \quad (7)$$

Para facilitar las cosas suponemos que el cohete tarda aproximadamente lo mismo en la subida que en la bajada, con lo cual, si llamamos T al tiempo total de vuelo (desde que despega hasta que toca el suelo):

$$t_{max} \doteq \frac{T}{2} \longrightarrow H_{max} \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{T}{2} \right)^2 g = T^2 \frac{g}{8} \doteq 1{,}23\, T^2 \quad (8)$$

En definitiva obtenemos una expresión aproximada y sencilla para calcular la altura máxima alcanzada por el cohete:

$$\boxed{H_{max} \doteq 1{,}23\, T^2}$$

Donde recordamos que T es el tiempo total que el cohete se pasa en el aire, desde el despegue hasta que toca el suelo.

ANEXO II: Demostración del cálculo de la altura máxima del cohete en función de los ángulos.

Existe una forma mucho más exacta de obtener la altura máxima del cohete, ya que en esta se tiene en cuenta las posibles desviaciones de la vertical causadas por el viento, por el impulso inicial al tirar del disparador, etc. En ella hay que poner a prueba todos nuestros conocimientos de trigonometría.

Si suponemos el caso ideal en el que el cohete sube perfectamente vertical tenemos la siguiente situación:

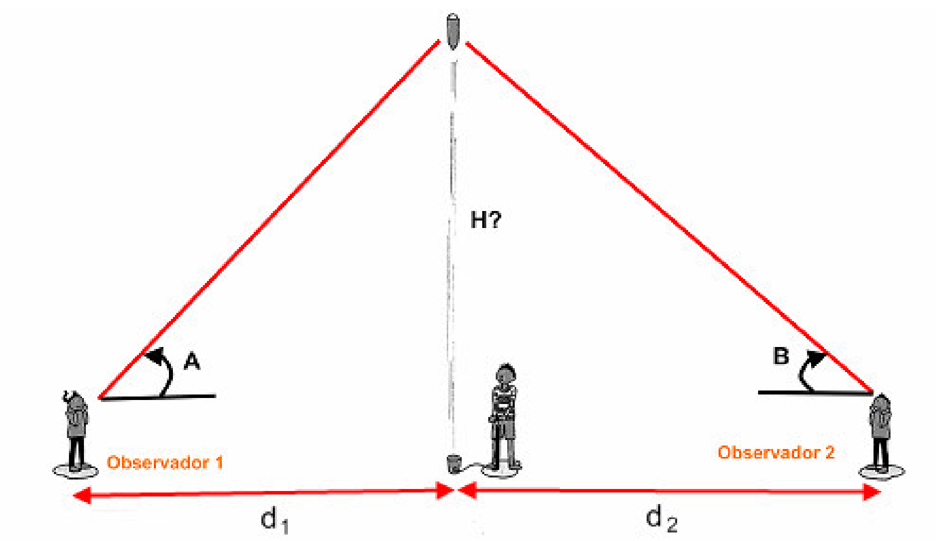


Figura 1

En este caso calcular la altura sería trivial y en realidad sólo se necesitaría uno de los observadores:

$$\mathbf{H = d_1 * \tan A}$$

En la situación real en la que el cohete es desviado, tenemos una situación más compleja:

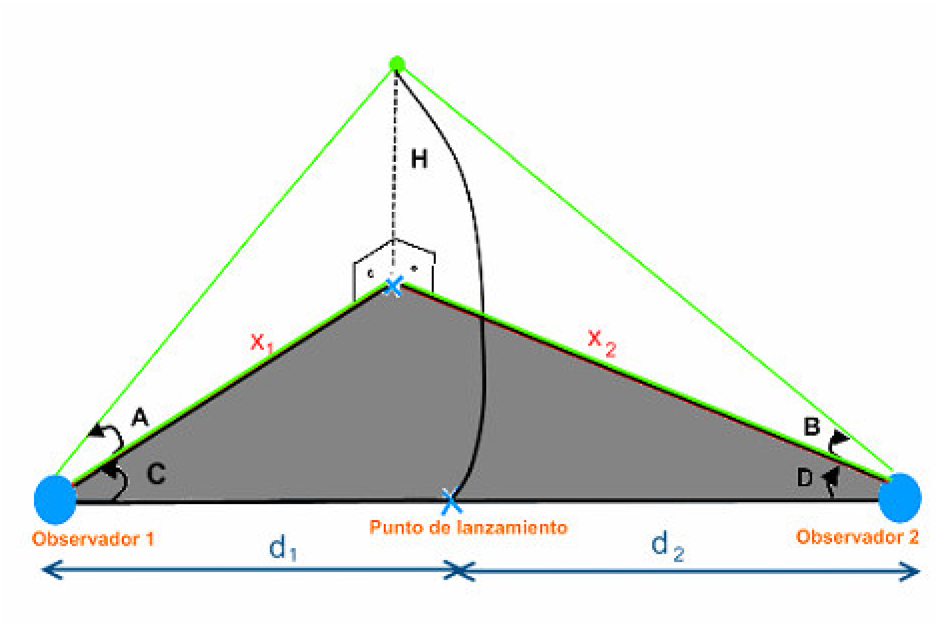


Figura 2

La altura que realmente nos interesa conocer es **H**, que es la altura del siguiente triángulo que dibujamos en verde:

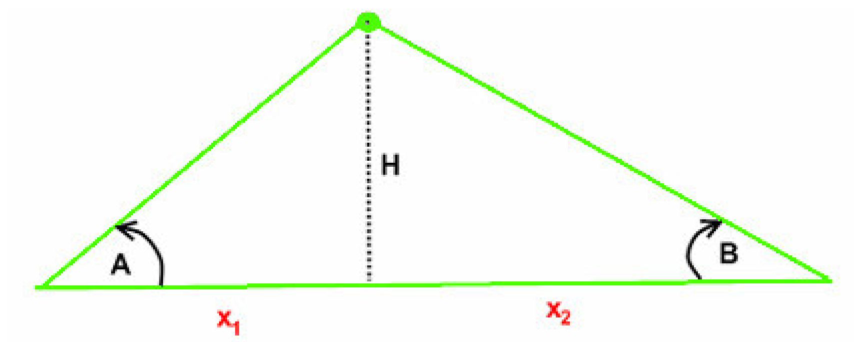


Figura 3

$$\tan A = \frac{H}{x_1} \longrightarrow x_1 = \frac{H}{\tan A}$$

$$\tan B = \frac{H}{x_2} \longrightarrow x_2 = \frac{H}{\tan B}$$

$$\Longrightarrow x_1 + x_2 = H\left(\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B}\right)$$

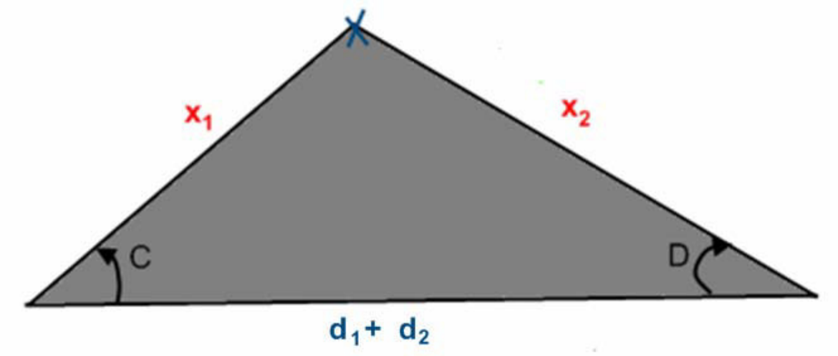
y despejando la H:

$$H = \frac{x_1 + x_2}{\dfrac{1}{\tan A} + \dfrac{1}{\tan B}} = (x_1 + x_2) * \frac{\tan A * \tan B}{\tan A + \tan B} \qquad \textbf{(1)}$$

Taller de cohetes

Necesitamos poner x_1 y x_2 en función de parámetros que conozcamos.

Volviendo a la figura 1, si ahora nos fijamos en el triángulo sombreado:



En este caso vamos a utilizar los teoremas del seno y el coseno que aplicados a este triángulo nos permiten obtener las siguientes relaciones:

$$\frac{\operatorname{sen} C}{x_2} = \frac{\operatorname{sen} D}{x_1}$$ **(2) Teorema del seno**

$$\left.\begin{array}{ll} x_1^2 = x_2^2 + (d_1 + d_2)^2 - 2 * (d_1 + d_2) * x_2 * \cos D & \textbf{(3)} \\ x_2^2 = x_1^2 + (d_1 + d_2)^2 - 2 * (d_1 + d_2) * x_1 * \cos C & \textbf{(4)} \end{array}\right\} \textbf{Teorema del coseno}$$

De (3) : $x_1^2 - x_2^2 = (d_1 + d_2)^2 - 2 * (d_1 + d_2) * x_2 * \cos D$

De (4): $x_2^2 - x_1^2 = (d_1 + d_2)^2 - 2 * (d_1 + d_2) * x_1 * \cos C$

Sumando ambas expresiones, sacando factor común y simplificando obtenemos:

$$0 = \cancel{2} * (d_1 + d_2)^{\cancel{2}} - \cancel{2} * \cancel{(d_1 + d_2)} * (x_1 * \cos C + x_2 * \cos D)$$

con lo que nos queda:

$$d_1 + d_2 = x_1 * \cos C + x_2 * \cos D$$

de donde podemos despejar x_1:

$$x_1 = \frac{d_1 + d_2 - x_2 * \cos D}{\cos C} \qquad \textbf{(5)}$$

Por otro lado, de la ecuación (2) tenemos que:

$$x_1 = x_2 * \frac{\operatorname{sen} D}{\operatorname{sen} C} \qquad \textbf{(6)}$$

e igualando las ecuaciones (5) y (6):

$$x_2 * \frac{\operatorname{sen} D}{\operatorname{sen} C} = \frac{d_1 + d_2 - x_2 * \cos D}{\cos C}$$

Operando:

$$x_2 * \frac{\operatorname{sen} D}{\tan C} = d_1 + d_2 - x_2 * \cos D$$

y despejando:

$$x_2 = \frac{d_1 + d_2}{\frac{\operatorname{sen} D}{\tan C} + \cos D}$$

Análogamente:

$$x_1 = \frac{d_1 + d_2}{\frac{\operatorname{sen} C}{\tan D} + \cos C}$$

Ya tenemos las expresiones de x_1 y x_2 en función de parámetros conocidos luego sustituyendo en la expresión de la altura (1) obtenemos:

$$H = \left(\frac{d_1 + d_2}{\frac{\operatorname{sen} C}{\tan D} + \cos C} + \frac{d_1 + d_2}{\frac{\operatorname{sen} D}{\tan C} + \cos D} \right) * \frac{\tan A * \tan B}{\tan A + \tan B}$$

Taller de cohetes

y reagrupando términos :

$$H = \frac{d_1 + d_2}{\tan A + \tan B} \left(\frac{1}{\frac{\text{sen } C}{\tan D} + \cos C} + \frac{1}{\frac{\text{sen } D}{\tan C} + \cos D} \right) \tan A * \tan B$$